

Тема: Логарифм і його властивості

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення логарифма, основну логарифмічну тотожність та основні властивості логарифмів;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні рівняння та обчислювати значення виразів за допомогою основних властивостей логарифмів;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- *Соціальна і громадянська компетентності:*
 - **Уміння:** висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аргументувати та відстоювати свою позицію; ухвалювати аргументовані рішення в життєвих ситуаціях; співпрацювати в команді, виділяти та виконувати власну роль в командній роботі;
 - **Ставлення:** ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших незалежно від статків, соціального походження; відповідальність за спільну справу;

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання, презентер;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

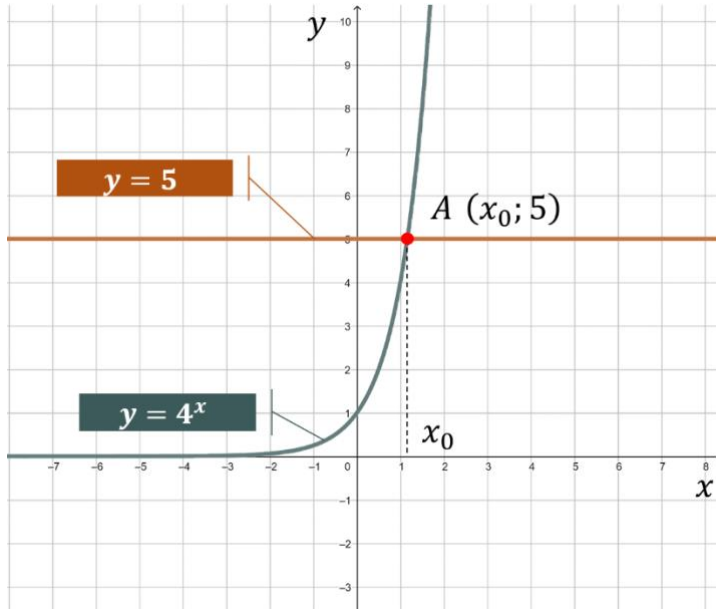
II. Вивчення нового матеріалу

- **Проблемне питання**

- Які саме числа будуть коренями цих рівнянь?
$$\begin{array}{l} 4^x = 16 \\ 4^x = 64 \end{array} \quad (2 \text{ і } 3)$$
- Чи буде мати розв'язки це рівняння?
$$4^x = 5$$



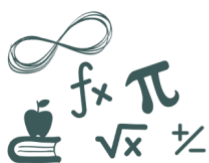
*Звернемося до графічної інтерпретації, щоб переконатися, що рівняння $4^x = 5$ має єдиний корінь.



- Що можемо сказати про « x_0 »?
(Це показник степеня, до якого треба піднести число 4, щоб отримати число 5)

*Отже, розв'язком рівняння $4^x = 5$ буде логарифм числа 5 за основою 4
Записується так: $\log_4 5$

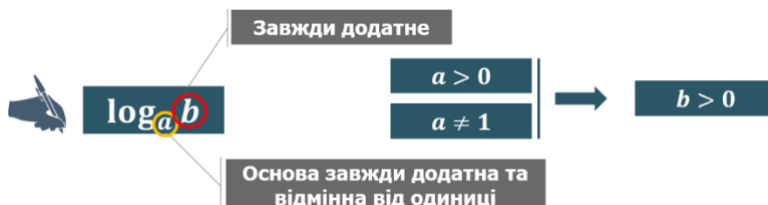
- Спробуйте сформулювати означення логарифма
(Показник степеня, до якого треба піднести число a , щоб отримати число b)
- Які обмеження має рівняння $a^x = b$?
($a > 0, a \neq 1$)
- За якої умови рівняння $a^x = b$ має розв'язок?
($b > 0$)
- Чи може основа логарифма дорівнювати 0 або 1?
(Ні)
- Чи матиме зміст вираз $\log_a b$, якщо $b < 0$?
(Ні, так як $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$)



• Логарифм і його властивості

Означення

Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .



*Отже, розглянувши рівність $4^3 = 64$, знаючи будь-які два числа – можемо знайти третє.

	Відомо	Знайти	Розв'язок	
$4^3 = 64$	4 і 3	64	$4^3 = 64$	Степінь
	64 і 3	4	$\sqrt[3]{64} = 4$	Корінь
	4 і 64	3	$\log_4 64 = 3$	Логарифм

Обчисліть:

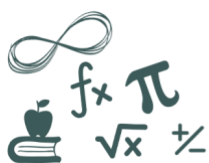
	Відповідь	Розв'язок
$\log_2 8$	3	$2^3 = 8$
$\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$	2	$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$
$\log_7 \frac{1}{49}$	-2	$7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

Поясніть, чому не існують:

$$\begin{array}{l} \log_3(-9) \\ \log_7 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} -4 \end{array}$$



Логарифм від'ємного числа і нуля не існує.



- Логарифмування

**Операцію знаходження логарифма числа називають логарифмуванням*

Піднесення до степеня	Логарифмування
$4^3 = 64$	$\log_4 64 = 3$
$(\sqrt{4})^4 = 16$	$\log_{\sqrt{4}} 16 = 4$
$(0,1)^4 = 0,0001$	$\log_{0,1} 0,0001 = 4$

- Логарифми з власними назвами

$$\log_{10} a = \lg a$$

Десятковий логарифм

$$\log_e a = \ln a$$

Натуральний логарифм

- Основна логарифмічна тотожність

$$\left. \begin{array}{l} a^x = b \\ a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \\ x = \log_a b \end{array} \right| \Rightarrow a^{\log_a b} = b$$



$$10^{\lg b} = ?$$

$$10^{\lg b} = b$$

$$\log_a 1 = ?$$

Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = ?$$

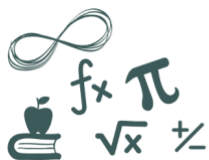
Логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці

$$\log_a a = 1$$

- Основні властивості логарифмів

Теорема (логарифм добутку)

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$



Теорема (логарифм частки)

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

*« \forall » - для будь-якого



$$\forall a > 0, a \neq 1 \text{ і } x > 0, y > 0:$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Логарифм добутку додатних чисел
дорівнює сумі логарифмів
множників

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Логарифм частки додатних чисел
дорівнює різниці логарифмів
діленого і дільника

Доведемо теорему про логарифм добутку:

$$a^{\log_a xy} = ?$$

- Використовуючи основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a xy} = xy$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = ?$$

- Використовуючи властивості степеня і основну логарифмічну тотожність, що можемо сказати?

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$$

- Який робимо висновок?

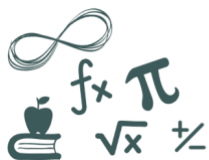
$$\left. \begin{aligned} a^{\log_a xy} &= xy \\ a^{\log_a x + \log_a y} &= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy \end{aligned} \right| \Rightarrow a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Доведено



Творче д/з:
Доведіть теорему про логарифм частки



Теорема (логарифм степеня)

Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, то $\forall \beta \in \mathbb{R}$:
$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня

- Ми знаємо, що при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Як можемо узагальнити формулу логарифму степеня?



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, то $\forall \beta \in \mathbb{R}$:
$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$
$$\log_a \sqrt[\beta]{x} = \frac{1}{\beta} \log_a x$$

Теорема (перехід від однієї основи логарифма до іншої)

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$



$\forall a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a \neq 1$, $c \neq 1$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

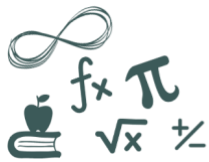
Логарифм додатного числа b за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа b за новою основою c , поділеному на логарифм старої основи a за новою основою c

Наслідок 1



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$



Наслідок 2



Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то $\forall \beta \neq 0$:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

• Узагальнення

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$$

Об'єднуючи ці дві властивості, що
можемо сказати про: $\log_{a^m} x^n = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \log_a x^n = n \log_a x \\ \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \end{array} \right| \Rightarrow \log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

➤ Чи можемо знайти логарифм добутку, у випадку коли x і y від'ємні?
 $\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0 \end{array} \right| \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \log_a(xy) \text{ — існує}$

➤ Чи можемо скористатися формулою, обґрунтованою для додатних
значень x і y ?
(Не можна)

*Для випадку $xy > 0$:

$$xy > 0 \Rightarrow xy = |x| \cdot |y| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |x| > 0 \\ |y| > 0 \end{array} \right|$$

➤ Як можемо узагальнити формулу логарифму добутку, якщо $x < 0$ і
 $y < 0$?

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$x < 0 \text{ і } y < 0$$

$$\log_a(xy) = \log_a(|x| \cdot |y|) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

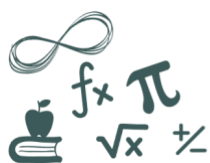
Також можливі інші узагальнення:

$$\text{Якщо } \frac{x}{y} > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\text{Якщо } x \neq 0$$

$$\log_a x^{2k} = 2k \log_a|x|$$



III. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

2) $\log_{25} 5 = 2$

3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$

4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

5) $\log_{0,01} 10 = 2$

6) $\lg 0,0001 = -4$

№2

Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1

2) 2

3) 32

4) $\sqrt{2}$

5) 0,5

6) $\frac{1}{8}$

7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

8) $2\sqrt{2}$

Розв'язок:

1) $\log_2 1 = 0$

2) $\log_2 2 = 1$

3) $\log_2 32 = 5$

4) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

5) $\log_2 0,5 = -1$

6) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

7) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$

8) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

№3

Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 1

2) 100

3) 0,1

4) 0,00001

Розв'язок:

1) $\lg 1 = 0$

2) $\lg 100 = 2$

3) $\lg 0,1 = -1$

4) $\lg 0,00001 = -5$

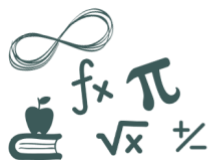
№4

Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x = -1$

2) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$

3) $\log_x 9 = 2$



Розв'язок:

$$1) \log_7 x = -1$$
$$x = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$$2) \log_{\sqrt{3}} x = 6$$
$$x = (\sqrt{3})^6 = 27$$

$$3) \log_x 9 = 2$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3$$
$$x = -3 \text{ (не задовольняє, так як } x > 0)$$

№5

Розв'яжіть рівняння:

$$1) 6^x = 2$$

$$2) 0,4^x = 9$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$

Розв'язок:

$$1) 6^x = 2$$
$$x = \log_6 2$$

$$2) 0,4^x = 9$$
$$x = \log_{0,4} 9$$

$$3) \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$$
$$1 - x = \log_{\frac{1}{3}} 2$$
$$x = 1 - \log_{\frac{1}{3}} 2$$

№6

Обчисліть:

$$1) 2^{\log_2 32}$$

$$2) 5^{\log_5 0,45}$$

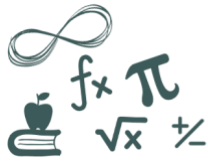
$$3) 7^{2 \log_7 2}$$

Розв'язок:

$$1) 2^{\log_2 32} = 32$$

$$2) 5^{\log_5 0,45} = 0,45$$

$$3) 7^{2 \log_7 2} = 7^{\log_7 4} = 4$$



Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$

2) $\log_5 100 - \log_5 4$

3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$

4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$

Розв'язок:

1) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 3 \cdot 2 = \log_6 6 = 1$

2) $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = 2$

3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12 = \log_{49} \frac{84}{12} = \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4} = \frac{\log_5 4^3}{\log_5 4} = \frac{3 \log_5 4}{\log_5 4} = 3$

№8

Обчисліть:

1) $64^{0,5 \log_2 12}$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 8 - 2}$

3) $6^{\frac{\log_1 3}{6}}$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$

Розв'язок:

1) $64^{0,5 \log_2 12}$

$$(2^6)^{0,5 \log_2 12} = 2^{3 \log_2 12} = (2^{\log_2 12})^3 = 12^3 = 1728$$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 8 - 2}$

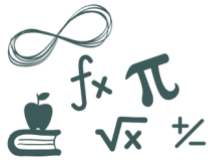
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 8 - 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 8} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 8 : \frac{4}{9} = 8 \cdot \frac{9}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

3) $6^{\frac{\log_1 3}{6}}$

$$6^{\frac{\log_1 3}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_1 3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_1 3^{-1}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\log_1 \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2} : \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 9^{-\frac{1}{2} \log_9 2} : \frac{1}{27} = 9^{\log_9 \frac{1}{\sqrt{2}}} : \frac{1}{27} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{27} = \frac{27}{\sqrt{2}}$$



Обчисліть:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$

3) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$

4) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

Розв'язок:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = -3$$

2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$

$$\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{7^2} 7^3 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \log_7 7 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$$

3) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$

$$\begin{aligned} \log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56 &= \log_2 ((5:35) \cdot 56) = \log_2 \left(\left(5 \cdot \frac{1}{35} \right) \cdot 56 \right) \\ &= \log_2 \frac{5 \cdot 56}{35} = \log_2 8 = 3 \end{aligned}$$

4) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$

$$2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16 = \lg 5^2 + \lg \sqrt{16} = \lg 25 \cdot 4 = \lg 100 = 2$$

№10

Знайдіть x , якщо:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$

2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$

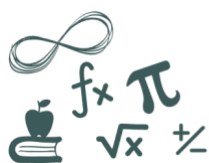
Розв'язок:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$

$$\begin{aligned} \log_9 x &= \log_9 \sqrt[4]{16} + \log_9 5^2 = \log_9 (2 \cdot 25) = \log_9 50 \\ x &= 9^{\log_9 50} = 50 \end{aligned}$$

2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$

$$\begin{aligned} \log_7 x &= \log_7 8^2 - \log_7 2^4 = \log_7 \frac{64}{16} = \log_7 4 \\ x &= 7^{\log_7 4} = 4 \end{aligned}$$



Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2}$

2) $\log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9$

Розв'язок:

1) $\frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2} = \frac{\log_7 \frac{27}{3^2}}{\log_7 (45 \cdot 0,2)} = \frac{\log_7 3}{\log_7 9} = \log_9 3 = \frac{1}{2}$ (Так як за формулою переходу до іншої основи $\log_9 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 9}$)

2) $\log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 3^2 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot$

$2 \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 3 = 2 \log_3 \cos \frac{\pi}{9} \cdot 2 \frac{1}{\log_3 \cos \frac{\pi}{9}} = 2 \cdot 2 = 4$ (Використали наслідок 1)

№12

Знайдіть значення виразу:

$\lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot \lg \sin 90^\circ$

Розв'язок:

$\left. \begin{array}{l} \sin 90^\circ = 1 \\ \log_a 1 = 0 \end{array} \right\} \text{отже:}$

$\begin{aligned} \lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot \lg \sin 90^\circ \\ = \lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot \lg 1 \\ = \lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot 0 = 0 \end{aligned}$

№13

Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_x 1$

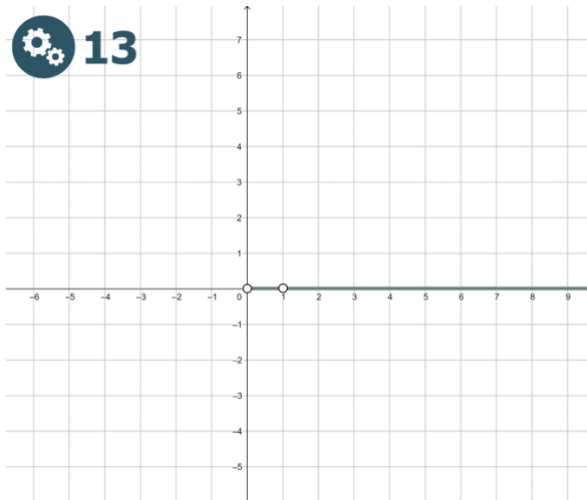
2) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$

3) $y = 2^{\log_2 x^2}$

Розв'язок:



 13



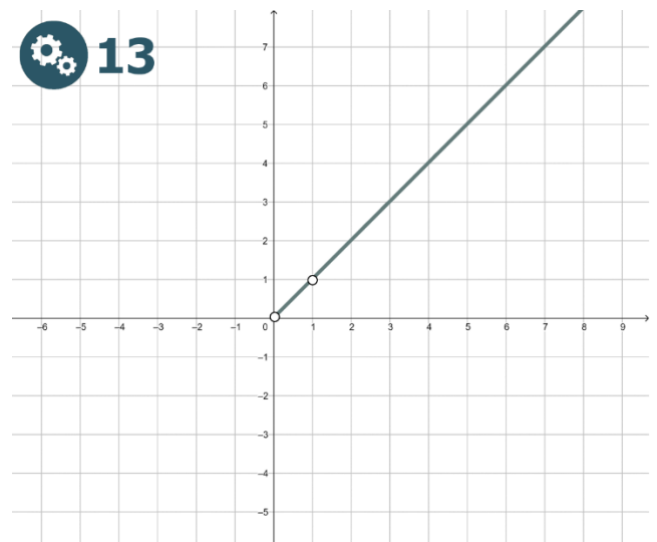
1) $y = \log_x 1$

$$y = \log_x 1 = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; x \neq 1$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

 13

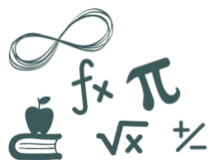


2) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$

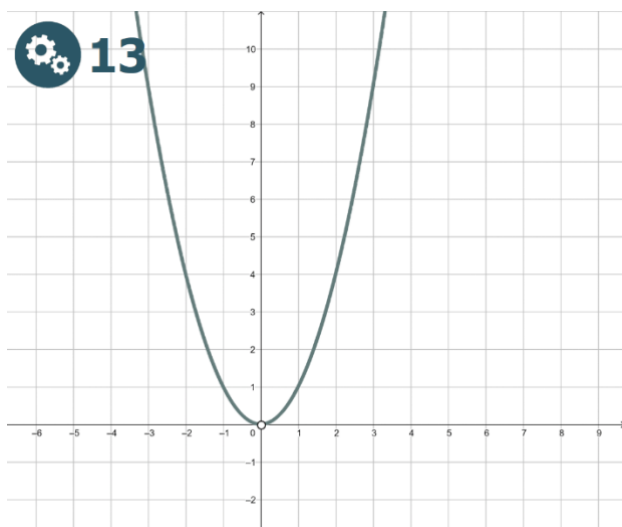
$$\text{ОДЗ: } x > 0; x \neq 1$$

$$y = 10^{\lg x} = x \text{ (Так як за наслідком I: } \lg x = \frac{1}{\log_x 10} \text{)}$$

$$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

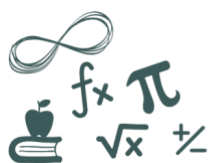


13



3) $y = 2^{\log_2 x^2} = x^2$ (Основна логарифмічна тотожність)

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$



IV. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення логарифма додатного числа b за основою a .
- Чи існує логарифм від'ємного числа або нуля?
- Якою може бути основа логарифма?
- Сформулюйте основну логарифмічну тотожність.
- Які логарифми називаються десятковими, а які натуральними?
- Сформулюйте основні властивості логарифмів.
- Запишіть формулу переходу від однієї основи до іншої та наслідки з неї.

V. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.20-23) Виконати № 4.3; 4.8 (1,3,5); 4.12; 4.14; 4.16 (1,4,5,7); 4.22 (1,4); 4.29 (1,2)	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §4 Виконати № 4.3; 4.7; 4.9; 4.11; 4.15; 4.21; 4.23	Істер О.С.
Опрацювати §3 Виконати № 3.2 (2,6,10); 3.3 (3,4,6); 3.4 (1,3,5); 3.5 (2,5); 3.8 (3,4); 3.9 (4,5)	Нелін Є.П.
Опрацювати §3 (22-24) Виконати № 106; 109; 110; 122; 125; 127;	Бевз Г.П.